Textos para Discussão FEE Nº 102

Secretaria do Planejamento, Gestão e Participação Cidadã
Fundação de Economia e Estatística Siegfried Emanuel Heuser

Mudança da metodologia de cálculo dos índices das exportações

Renan Xavier Cortes

Porto Alegre, março de 2012

SECRETARIA DO PLANEJAMENTO, GESTÃO E

PARTICIPAÇÃO CIDADÃ

Secretário: João Motta

Fundação de Economia e Estatística

DIRETORIA
Presidente: Adalmir Antonio Marquetti
Diretor Técnico: André Luis Forti Scherer
Diretor Administrativo: Roberto Pereira da Rocha

CENTROS
Estudos Econômicos e Sociais: Renato Antonio Dal Maso
Pesquisa de Emprego e Desemprego: Dulce Helena Vergara
Informações Estatísticas: Cecília Rutkoski Hoff
Informática: Luciano Zanuz
Documentação: Tânia Leopoldina P. Angst
Recursos: Maria Aparecida R. Forni

TEXTOS PARA DISCUSSÃO
Publicação cujo objetivo é divulgar resultados de estudos direta ou indiretamente desenvolvidos pela FEE, os quais, por sua relevância, levam informações para profissionais especializados e estabelecem um espaço para sugestões. As opiniões emitidas nesta publicação são de exclusiva e de inteira responsabilidade do(s) autor(es), não exprimindo, necessariamente, o ponto de vista da Fundação de Economia e Estatística.

http://www.fee.rs.gov.br/textos-para-discussao

Mudança da metodologia de cálculo dos índices das exportações

Renan Xavier Cortes *Pesquisador em Estatística da FEE*

RESUMO

Este trabalho tem por fim apresentar formalmente a atual metodologia dos índices de valor, volume e preço das exportações, que são calculados pela FEE mensalmente, e apresentar as derivações das equações da nova metodologia proposta. Optou-se por manter o atual método de cálculo do índice de volume do tipo Laspeyres e de preço Paasche, porém com o método de deflacionamento inverso. O trabalho apresenta motivações teóricas e implicações do novo método no encadeamento da série histórica.

Palavras-chave: índice de Laspeyres; índice de Paasche; índice de exportações.

Classificação JEL: C0, C1, C43.

ABSTRACT

The goal of this paper is to formally present the actual methodology of the exportation value, price and volume indexes that are monthly calculated by FEE and present the derivation of the equations for the new proposed methodology. It was chosen to keep the actual calculation method for the Laspeyres Volume Indexes and Paasche price Indexes, but with deflation method inverted. The paper presents theoretical motivations and implications of the new methodology in the chained indexes.

Key words: *Laspeyres index; Paasche index; exportation index.*

***JEL classification**: C0, C1, C43.*

Introdução

As estatísticas de exportação e importação são divulgadas mensalmente pela Secretaria de Comércio Exterior, vinculada ao Ministério do Desenvolvimento, Indústria e Comércio Exterior. Os dados são disponibilizados *on-line*, com informações para o Brasil e para todas as unidades da Federação, segundo os códigos da Nomenclatura Comum do Mercosul (NCM), que é uma classificação de mercadorias transacionadas no comércio exterior, adotada desde 1995 pelos países membros do Mercosul. A NCM tem como base o Sistema Harmonizado de Designação e de Codificação de Mercadorias (Harmonized Commodity Description and Coding System), que é um método internacional de classificação de mercadorias, criado para promover o desenvolvimento do comércio internacional, assim como para aprimorar a coleta, a comparação e a análise das estatísticas, particularmente as do comércio exterior.

A FEE calcula mensalmente os índices de valor, volume e de preço (em dólares) das exportações do Brasil e de todas as unidades da Federação, apresentando uma série a partir de janeiro de 2003. Adicionalmente, são calculados, para o Rio Grande do Sul e para o Brasil, os índices de valor, volume e de preço segundo as 21 seções e os 96 capítulos da Nomenclatura Comum do Mercosul e as 17 seções, as 59 divisões e os 218 grupos da Classificação Nacional de Atividades Econômicas (CNAE). Os dados divulgados pela Secex contêm informações mensais sobre os valores (em dólares) e volumes exportados. Atualmente, esse conjunto de dados é utilizado para construir índices mensais de volume (do tipo Laspeyres), com base móvel, isto é, os índices mensais de cada ano têm como base a média do ano anterior. Os índices de preços (do tipo Paasche) são obtidos implicitamente, a partir dos índices de valor e dos índices de volume. Posteriormente, os índices de cada ano são encadeados, tomando-se como escala o ano de 2003[1].

No entanto, a atual metodologia utilizada, em que o índice de volume do tipo Laspeyres explícito (isto é, sem deflacionamento) é calculado com base na estrutura do ano anterior, está acarretando alguns problemas metodológicos. Os índices de volume calculados são controlados pelas possíveis discrepâncias de valor de alguns produtos declarados pela Secretaria de Comércio Exterior. Esse controle do índice de volume se deve à exclusão de determinados produtos da pauta das exportações. Por outro lado, os índices de valor são construídos com base em todo o valor exportado declarado e, posteriormente, utilizado para deflacionar os índices de volume, gerando, assim, um índice de preço do tipo Paasche implícito. Consequentemente, as possíveis grandes variações de valores declaradas podem acabar inflando as variações de preço dos indicadores, à medida que essa variação é controlada para o cálculo do índice de volume. Isto é, o índice de preço ainda é afetado pelas variações de valor da pauta.

Tal característica não é coerente com a hipótese de que as variações de volume podem ser mais voláteis, desde que o preço seja mantido razoavelmente constante. Em outras palavras, é mais plausível assumir grandes variações no volume do que grandes variações no preço.

O presente texto discute a atual metodologia utilizada no cálculo desses índices e apresenta a derivação de um número de equações, mostrando ao leitor as diferentes

[1] Ver: <http://www.fee.tche.br/sitefee/pt/content/estatisticas/pg_exportacoes_metodologia.php>. Acesso em: jan./12.

combinações de índices e quais são os tipos de indicadores que são gerados pelo deflacionamento pelo índice de valor descrito anteriormente. Esta publicação possui um cunho teórico que aborda a atual metodologia da FEE, a metodologia utilizada nas exportações do PIB trimestral do IBGE, os índices gerados pelo deflacionamento de um índice de Fisher e a estrutura analítica explícita de cada um dos indicadores em discussão. As derivações são feitas de maneira didáticas e abordam as dificuldades que foram encontradas em constantes reuniões de discussão.

1. Derivação das equações dos números índices

1ª Relação fundamental: $Valor = Volume \times Preço$

2ª Relação fundamental: $I_{valor} = I_{volume} \times I_{preço}$

Notação:

L_q – Índice de volume Laspeyres

L_p – Índice de preço Laspeyres

P_q – Índice de volume Paasche

P_p – Índice de preço Paasche

F_q – Índice de volume Fisher

F_p – Índice de preço Fisher

p_k – Preço do período *k*

q_k – Volume do período *k*

$\bar{p}_{ib}$ – Média de preço do produto *i* do ano anterior (ano base)

$\bar{q}_{ib}$ – Média de volume do produto *i* do ano anterior (ano base)

$\bar{w}_{ib}$ – Participação de valor do produto *i* do ano anterior (ano base)

2.1 Relações entre os índices de Laspeyres, Paasche e Valor

Para dois intervalos de tempo distintos e uma pauta de exportações com *n* produtos, sabe-se que a multiplicação entre os índices de volume de Laspeyres, com ponderações no passado, e o índice de preço Paasche, com ponderações no presente, resulta no índice de valor. Esse resultado é verificado a seguir.

$$L_q P_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}} \times \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}} = I_{valor}$$

$$L_p P_q = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}} \times \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i0}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}} = I_{valor}$$

O indexador *zero* significa que o valor é de um mês do passado, e o indexador *um* significa que o valor é do presente. Note-se também que os somatórios percorrem todos os produtos exportados (o índice *i* varia de *um* até *n*). Esse resultado é extremamente útil e nos mostra que o deflacionamento de um índice de Laspeyres de volume pelo índice de valor resulta em um índice de preço Paasche, e vice-versa. Da mesma forma, o deflacionamento de um índice de preço Laspeyres resulta em um índice de volume Paasche, e vice-versa. Essa importante relação será utilizada nas futuras derivações.

2.2 Verificando o índice de preço gerado pela FEE atualmente

A mudança metodológica implica o entendimento completo do que é feito hoje em dia no cálculo dos índices de exportação. Tendo isso em mente, foi de interesse analisar qual o tipo de preço Paasche que é gerado com a atual metodologia. Atualmente, o índice Laspeyres é calculado com as variações baseadas em toda a estrutura do ano anterior. Isto é, os índices mensais são as variações do mês com relação à média do ano anterior, ponderados pela participação de valor de todo o ano anterior. Ou seja,

$$L_q = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_{ib} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_{ib} \bar{q}_{ib}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_{ib} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_{ib} \bar{q}_{ib}} \times \frac{\bar{q}_{ib}}{\bar{q}_{ib}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{q_{i1}}{\bar{q}_{ib}}\right) \times \frac{\bar{p}_{ib} \bar{q}_{ib}}{\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_{ib} \bar{q}_{ib}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{q_{i1}}{\bar{q}_{ib}}\right) \times \bar{w}_{ib}$$

Os índices de valor também são construídos com base em toda a estrutura do ano anterior. Isto é, a variação de valor é dada pelo quociente entre o valor exportado do mês atual e o valor médio do ano anterior. Logo, utilizando a relação fundamental descrita no item 2.1, pode-se derivar a seguinte relação:

$$L_q P_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_{ib} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_{ib} \bar{q}_{ib}} \times P_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_{ib} \bar{q}_{ib}} \xrightarrow{Isolando\ P_p} P_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_{ib} \bar{q}_{ib}} \times \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_{ib} \bar{q}_{ib}}{\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_{ib} q_{i1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_{ib} q_{i1}}$$

Logo, esse tipo de índice explícito de volume calculado atualmente gera um índice de preço Paasche que representa um quociente entre o valor do mês atual e um somatório da multiplicação entre o volume do mês atual e um tipo do preço médio do ano anterior:

$$\text{Índice de Preço Paasche} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_{ib} q_{i1}} \qquad (1)$$

2.3 Verificando o índice de volume calculado pelo IBGE no cálculo do PIB trimestral

Para fins comparativos, foi derivado o tipo de índice de volume que a metodologia do cálculo explícito dos índices de preço das exportações do PIB trimestral que é gerado pelo IBGE. A passagem consta a seguir:

$$P_p L_q = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_{ib} q_{i1}} \times L_q = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_{ib} \bar{q}_{ib}} \xrightarrow{Isolando\, L_q} \boldsymbol{L_q} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_{ib} \bar{q}_{ib}} \times \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_{ib} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_{ib} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_{ib} \bar{q}_{ib}}$$

Note-se que o resultado é equivalente ao índice de volume explícito que é calculado pela FEE do tipo Laspeyres. Em outras palavras, as metodologias são equivalentes. Isto é, os índices de preço implícitos calculados atualmente pela FEE geram exatamente os índices de preço explícitos calculados pelo IBGE. Consequentemente, os índices de volume implícitos calculados pelo IBGE geram os índices de volume explícitos pela FEE.

2.4 Verificando o índice implícito gerado por índices de Fisher

Os índices de Fisher calculam as variações, sintetizando as informações geradas pelos índices de Paasche e Laspeyres e calculando a média geométrica entre essas duas metodologias. Muitas desejáveis propriedades são discutidas na literatura e apontam esse índice como um dos melhores. Fisher considerou esse índice “ideal” porque ele satisfez vários testes considerados importantes, como os de “reversibilidade no tempo” e “reversibilidade dos fatores”. O primeiro teste exige que o índice para o período *t*, com base no período *0*, seja recíproco do período *0* com base no período *t*. A reversibilidade dos fatores exige que o produto do índice de preços pelo índice de volume seja igual à variação relativa dos valores correntes. Os índices de Laspeyres e de Paasche não satisfazem esses testes[2].

Esse índice apresenta grandes atrativos, razão pela qual é largamente utilizado nas estatísticas econômicas. Contudo, é frequentemente referido por apresentar algumas desvantagens, umas de natureza prática, outras no domínio dos conceitos. Por exemplo, ele obriga o cálculo prévio dos índices de Laspeyres e de Paasche, provocando não só aumento de custos como eventuais atrasos no seu cálculo e publicação. Outro ponto é que não é tão fácil de compreender como os índices de Laspeyres e de Paasche, os quais podem simplesmente ser interpretados como a variação de valor de um tipo determinado de bens e serviços.

[2] Ver: Capítulo 15: *Price and Volume measures*. *System of National Accounts 2008*. Disponível em <http://unstats.un.org/unsd/nationalaccount/docs/SNA2008.pdf>. Acesso em: nov./11.

Durante as discussões metodológicas, foi levantada a questão de qual era o tipo de índice gerado pelo deflacionamento de um índice de Fisher. As derivações das equações para dois períodos de tempo distintos e genéricos constam a seguir:

$$F_q = \sqrt{L_q \times P_q} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}} \times \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i0}}} \qquad (2)$$

$$F_p = \sqrt{L_p \times P_p} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}} \times \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i1}}} \qquad (3)$$

Analisando as equações (2) e (3), verifica-se quais são os tipos de índices gerados pelo deflacionamento, multiplicando cada um dos índices por uma variável desconhecida auxiliar.

$$x \times F_q = I_{valor} \xRightarrow{Substituindo} x \times \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}} \times \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i0}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}}$$

Isolando a variável *x,* verifica-se qual expressão resultará:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}} \times \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i1}} \times \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}} \xRightarrow{Elevando\ ao\ quadrado} x^2$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}\right)^2} \times \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i1}} \times \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}$$

$$\xRightarrow{Simplificando\ termos} x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i1}} \times \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}} \xRightarrow{Extraindo\ a\ raiz} \mathbf{x}$$

$$= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i1}} \times \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}}} = F_p$$

Como resultado, tem-se o índice de preço de Fisher:

$$x = \text{Índice de Preço Fisher} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i1}} \times \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}}} \qquad (4)$$

Verifica-se, então, qual índice é gerado pelo deflacionamento do índice de preço de Fisher. Utiliza-se, para isso, a variável auxiliar *y*.

$$y \times F_p = I_{valor} \xRightarrow{Substituindo} y \times \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}} \times \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i1}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}}$$

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}} \times \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i0}} \times \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}} \xrightarrow{\text{Elevando ao quadrado}} y^2$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}\right)^2} \times \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i0}} \times \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}$$

$$\xrightarrow{\text{Simplificando termos}} y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i0}} \times \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}} \xrightarrow{\text{Extraindo a raiz}} y$$

$$= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i0}} \times \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}}} = F_q$$

Como resultado, tem-se o índice de volume de Fisher:

$$y = \text{Índice de Volume Fisher} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i0}} \times \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}}} \qquad (5)$$

Analisando as equações (4) e (5), concluiu-se que os índices de volume do tipo Fisher geram índices de preço do tipo Fisher e vice-versa.

2. Estrutura analítica de composição dos índices

Uma das dificuldades encontrada após as derivações das equações dos números índices foi a plena compreensão da estrutura analítica que compunha os índices. Os dados divulgados pela Secretaria do Comércio Exterior contêm informações mensais sobre os valores (em dólares) e volumes (em kg líquido) exportados, e com esses valores são calculados os índices de volume do tipo Laspeyres. A metodologia que aborda um índice de preço explícito e que contém na sua estrutura a estimação do preço médio do ano anterior dos produtos necessita evidenciar qual é o seu significado e de que maneira é estimado esse novo termo na fórmula. Em outras palavras, necessita-se saber qual a verdadeira estrutura da equação (1). Pensando nisso, este trabalho se dedica às derivações analíticas.

3.1 Estimando o termo $\bar{p}_b$ para as variações do ano base

A notação assume que todos os índices de volume são do tipo Laspeyres e que os índices de preço são do tipo Paasche.

Para ilustrar o problema da estimação dos índices, supõe-se uma pauta de exportação de um ano arbitrário qualquer e constroem-se os índices para as variações semestrais para apenas três produtos exportados. Todos os valores e volumes podem ter valores distintos, e, no primeiro semestre, exportam-se apenas os dois primeiros produtos. Note-se que esse exemplo pode generalizar a idéia para qualquer quantidade *n* de produtos e para qualquer período de tempo (por exemplo, índices mensais).

A estrutura de exportação é a seguinte:

Semestres	Produtos	Volumes	Valores
1	1	a	f
	2	b	g
2	1	c	h
	2	d	i
	3	e	j

$$I_{valor1} = \frac{f+g}{\left(\frac{f+g+h+i+j}{2}\right)}$$

$$I_{valor2} = \frac{h+i+j}{\left(\frac{f+g+h+i+j}{2}\right)}$$

$$I_{volume1} = \underbrace{\underbrace{\left(\frac{a}{\left(\frac{a+c}{2}\right)}\right)}_{Variação\ de\ volume} \times \underbrace{\left(\frac{f+h}{f+g+h+i+j}\right)}_{Participação\ de\ Valor}}_{Produto\ 1} + \underbrace{\underbrace{\left(\frac{b}{\left(\frac{b+d}{2}\right)}\right)}_{Variação\ de\ volume} \times \underbrace{\left(\frac{g+i}{f+g+h+i+j}\right)}_{Participação\ de\ valor}}_{Produto\ 2}$$

$$I_{volume2} = \underbrace{\underbrace{\left(\frac{c}{\left(\frac{a+c}{2}\right)}\right)}_{Variação\ de\ volume} \times \underbrace{\left(\frac{f+h}{f+g+h+i+j}\right)}_{Participação\ de\ valor}}_{Produto\ 1} + \underbrace{\underbrace{\left(\frac{d}{\left(\frac{b+d}{2}\right)}\right)}_{Variação\ de\ volume} \times \underbrace{\left(\frac{g+i}{f+g+h+i+j}\right)}_{Participação\ de\ valor}}_{Produto\ 2}$$
$$+ \underbrace{\underbrace{\left(\frac{e}{\left(\frac{e}{2}\right)}\right)}_{Variação\ de\ volume} \times \underbrace{\left(\frac{j}{f+g+h+i+j}\right)}_{Participação\ de\ valor}}_{Produto\ 3}$$

Note-se que, nas duas primeiras equações, o índice de valor de cada semestre é dado pela razão entre o total de valor exportado e o valor médio exportado de todo o ano. Para as duas últimas equações do quadro, cada termo do somatório refere-se à variação de volume com relação ao volume médio do ano ponderados pela participação de valor no ano dos produtos. Para o primeiro semestre, têm-se dois produtos, e, para o segundo semestre, três produtos; isto é, dois e três termos no somatório, respectivamente.

Para calcular o índice de preço implícito para o primeiro semestre, faz-se:

$$I_{preço1} = \frac{I_{valor1}}{I_{volume1}} = I_{valor1} \times (I_{volume1})^{-1}$$

$$I_{preço1} = \underbrace{\left(\frac{f+g}{\left(\frac{f+g+h+i+j}{2}\right)}\right)}_{I_{valor1}} \times \left[\underbrace{\left(\frac{a}{\left(\frac{a+c}{2}\right)}\right) \times \left(\frac{f+h}{f+g+h+i+j}\right) + \left(\frac{b}{\left(\frac{b+d}{2}\right)}\right) \times \left(\frac{g+i}{f+g+h+i+j}\right)}_{I_{volume1}}\right]^{-1}$$

Para simplificar, fazemos

$$f+g+h+i+j=K.$$

Isto é, K representa o total de valor exportado no ano. Agora aplica-se o somatório do índice de volume que está dentro da função inversa.

Sabe-se que

$$I_{volume1} = \frac{a(f+h)}{\left(\frac{K(a+c)}{2}\right)} + \frac{b(g+i)}{\left(\frac{K(b+d)}{2}\right)} = \frac{2}{K} \times \left(\frac{a(b+d)(f+h)+b(a+c)(g+i)}{(a+c)(b+d)}\right)$$

Logo,

$$I_{preço1} = \left(\frac{f+g}{\left(\frac{K}{2}\right)}\right) \times \frac{K}{2} \times \frac{(a+c)(b+d)}{a(b+d)(f+h)+b(a+c)(g+i)} = \frac{(f+g)(a+c)(b+d)}{a(b+d)(f+h)+b(a+c)(g+i)}$$

Note-se agora que se tem um termo que envolve o total de valor exportado no semestre atual, representado pelo termo *(f+g)*. Para manter apenas esse termo no numerador, multiplica-se o numerador e o denominador pelo mesmo fator, para garantir a identidade da expressão:

$$I_{preço1} = \frac{(f+g)(a+c)(b+d)}{a(b+d)(f+h)+b(a+c)(g+i)} \times \frac{\frac{1}{(a+c)(b+d)}}{\frac{1}{(a+c)(b+d)}} = \frac{\frac{(f+g)(a+c)(b+d)}{(a+c)(b+d)}}{\left(\frac{a(b+d)(f+h)}{(a+c)(b+d)} + \frac{b(a+c)(g+i)}{(a+c)(b+d)}\right)}$$
$$= \frac{f+g}{a\left(\frac{f+h}{a+c}\right) + b\left(\frac{g+i}{b+d}\right)}$$

Fazendo os cálculos análogos para o índice de preço implícito do segundo semestre faz-se:

$$I_{preço2} = \frac{I_{valor2}}{I_{volume2}} = I_{valor2} \times (I_{volume2})^{-1}$$

$$I_{preço2} = \left(\frac{h+i+j}{\left(\frac{f+g+h+i+j}{2}\right)}\right) \times \left[\left(\frac{c}{\left(\frac{a+c}{2}\right)}\right) \times \left(\frac{f+h}{f+g+h+i+j}\right) + \left(\frac{d}{\left(\frac{b+d}{2}\right)}\right) \times \left(\frac{g+i}{f+g+h+i+j}\right) + \left(\frac{e}{\left(\frac{e}{2}\right)}\right) \times \left(\frac{j}{f+g+h+i+j}\right)\right]^{-1}$$

Sabe-se que

$$I_{volume2} = \left(\frac{c(f+h)}{\frac{K(a+c)}{2}}\right) + \left(\frac{d(g+i)}{\frac{K(b+d)}{2}}\right) + \left(\frac{ej}{\left(\frac{Ke}{2}\right)}\right) = \\ = \frac{2}{K} \times \frac{c(f+h)(b+d)e + d(g+i)(a+c)e + ej(a+c)(b+d)}{(a+c)(b+d)e}$$

Logo,

$$I_{preço2} = \left(\frac{h+i+j}{\left(\frac{K}{2}\right)}\right) \times \frac{K}{2} \times \frac{(a+c)(b+d)e}{c(f+h)(b+d)e + d(g+i)(a+c)e + ej(a+c)(b+d)} = \\ = \frac{(h+i+j)(a+c)(b+d)e}{c(f+h)(b+d)e + d(g+i)(a+c)e + ej(a+c)(b+d)}$$

Multiplicando numerador e denominador por um fator comum, fica-se com:

$$I_{preço2} = \frac{(h+i+j)(a+c)(b+d)e}{c(f+h)(b+d)e + d(g+i)(a+c)e + ej(a+c)(b+d)} \times \frac{\frac{1}{(a+c)(b+d)e}}{\frac{1}{(a+c)(b+d)e}} = \\ = \frac{\frac{(h+i+j)(a+c)(b+d)e}{(a+c)(b+d)e}}{\left(\frac{c(f+h)(b+d)e + d(g+i)(a+c)e + ej(a+c)(b+d)}{(a+c)(b+d)e}\right)} = \frac{h+i+j}{c\left(\frac{f+h}{a+c}\right) + d\left(\frac{g+i}{b+d}\right) + j}$$

Analisar-se-á agora, concomitantemente, a pauta das exportações da tabela do ano, as expressões analíticas obtidas e a fórmula do índice de preço implícito gerado na primeira parte e interpretar o significado de cada um dos termos.

Semestres	Produtos	Volumes	Valores
1	1	a	f
	2	b	g
2	1	c	h
	2	d	i
	3	e	j

$$\textit{Índice de Preço Paasche} = \frac{\sum_{i=1}^{3} p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{3} p_{ib} q_{i1}} \qquad (6)$$

$$I_{preço1} = \frac{f+g}{a\left(\frac{f+h}{a+c}\right)+b\left(\frac{g+i}{b+d}\right)}$$

$$I_{preço2} = \frac{h+i+j}{c\left(\frac{f+h}{a+c}\right)+d\left(\frac{g+i}{b+d}\right)+e\left(\frac{j}{e}\right)}$$

Note-se que a estrutura analítica obtida ilustra exatamente e equação (6), que representa a equação (1) para apenas três produtos, obtida nas derivações do Capítulo 2.2, com o termo $\overline{p}_b$ sendo estimado pela soma de valor de todo o ano do respectivo produto dividido pela soma de volume do mesmo (para o terceiro produto, tem-se apenas um termo entre parênteses no segundo índice, pois ele foi exportado em apenas um semestre). Note-se também que o último termo do denominador do índice do segundo semestre foi reescrito para a unificação da interpretação.

Note-se ainda que

$$j = e\left(\frac{j}{e}\right).$$

Além disso, na equação (6) o termo do numerador representa a soma da multiplicação entre o preço e o volume, isto é, a soma de valor. Tal indicador obtido representa, na realidade, a variação semestral de preço com relação ao "valor unitário" (VU) total de todo o ano, cujo conceito é dado na sequência.

Como não se têm as informações de preço de cada produto da pauta, utiliza-se como *proxy* de estimação de preço a razão entre o valor e o volume de cada produto. Nesse campo estatístico de trocas de mercadorias baseadas em documentação customizada, os dados em que os índices de preço e volume são calculados não são suficientemente detalhados para o seu propósito. Por exemplo, a informação básica disponível pode estar limitada ao número total de unidades de um grupo de produtos exportados, ou peso total, por exemplo, o número total de pares de sapatos exportados, ou peso total de determinado equipamento de certo tipo. Índices construídos a partir desse tipo de informações podem não ser índices de volume, quando o número, ou peso, englobam diferentes itens que são vendidos a diferentes preços. Esses índices são muitas vezes chamados de "índices de quantidade" por esse motivo. Os índices de preço associados com tais índices são descritos como índices de "valor unitário". Índices de valor unitário mensuram as mudanças na média de valores unitários que não são necessariamente homogêneas e podem ser afetadas pela mudança de itens da pauta assim como mudanças nos seus preços. Índices de valor unitário não podem, portanto, promover boas medidas de mudança de preço ao longo do tempo para itens não homogêneos.[3]

Por esse motivo, calculam-se os valores unitários por produto, dividindo o valor pelo peso, em quilogramas. Não se utiliza a informação de quantidade devido à variedade de unidades de medidas utilizada, assim como no IBGE[4]. Os índices de preço gerados são, portanto:

$$I_{preço1} = \frac{\underbrace{f+g}_{\text{Soma de valor do semestre 1}}}{\underbrace{\underbrace{a}_{\text{Volume do semestre 1}}\underbrace{\left(\frac{f+h}{a+c}\right)}_{\text{VU do ano}}}_{\text{Produto 1}} + \underbrace{\underbrace{b}_{\text{Volume do semestre 1}}\underbrace{\left(\frac{g+i}{b+d}\right)}_{\text{VU do ano}}}_{\text{Produto 2}}}$$

$$I_{preço2} = \frac{\underbrace{h+i+j}_{\text{Soma de valor do semestre 2}}}{\underbrace{\underbrace{c}_{\text{Volume do semestre 2}}\underbrace{\left(\frac{f+h}{a+c}\right)}_{\text{VU do ano}}}_{\text{Produto 1}} + \underbrace{\underbrace{d}_{\text{Volume do semestre 2}}\underbrace{\left(\frac{g+i}{b+d}\right)}_{\text{VU do ano}}}_{\text{Produto 2}} + \underbrace{\underbrace{e}_{\text{Volume do semestre 2}}\underbrace{\left(\frac{j}{e}\right)}_{\text{VU do ano}}}_{\text{Produto 3}}}$$

3.2 Generalizando as expressões para outros anos

Para as variações nos demais anos, pode-se generalizar as expressões dos índices de valor, volume e preço para um ano *t* baseando-se nas informações do ano anterior. Os cálculos são similares aos anteriores.

Seja a seguinte pauta de exportações:

Semestres	Produtos	Volumes	Valores
1	1	a_{t-1}	f_{t-1}
	2	b_{t-1}	g_{t-1}
2	1	c_{t-1}	h_{t-1}
	2	d_{t-1}	i_{t-1}
	3	e_{t-1}	j_{t-1}

Exportações realizadas no ano t-1

Semestres	Produtos	Volumes	Valores
1	1	a_t	f_t
	2	b_t	g_t
2	1	c_t	h_t
	2	d_t	i_t
	3	e_t	j_t

Exportações realizadas no ano t

[3] Ver: Capítulo 15: *Price and Volume measures*. *System of National Accounts 2008*. Disponível em <http://unstats.un.org/unsd/nationalaccount/docs/SNA2008.pdf>. Acesso em: nov./11.

[4] Ver: Capítulo: Procedimentos de Cálculo. Série Relatórios Metodológicos Nº 28. Disponível em <http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/indicadores/pib/srmtrimestrais.pdf>. Acesso em: nov./11.

$$I_{valor1} = \frac{f_t + g_t}{\left(\frac{f_{t-1} + g_{t-1} + h_{t-1} + i_{t-1} + j_{t-1}}{2}\right)}$$

$$I_{valor2} = \frac{h_t + i_t + j_t}{\left(\frac{f_{t-1} + g_{t-1} + h_{t-1} + i_{t-1} + j_{t-1}}{2}\right)}$$

$$I_{volume1} = \left(\frac{a_t}{\left(\frac{a_{t-1} + c_{t-1}}{2}\right)}\right) \times \left(\frac{f_{t-1} + h_{t-1}}{f_{t-1} + g_{t-1} + h + i_{t-1} + j_{t-1}}\right) + \left(\frac{b_t}{\left(\frac{b_{t-1} + d_{t-1}}{2}\right)}\right) \times \left(\frac{g_{t-1} + i_{t-1}}{f_{t-1} + g_{t-1} + h + i_{t-1} + j_{t-1}}\right)$$

$$I_{volume2} = \left(\frac{c_t}{\left(\frac{a_{t-1} + c_{t-1}}{2}\right)}\right) \times \left(\frac{f_{t-1} + h_{t-1}}{f_{t-1} + g_{t-1} + h + i_{t-1} + j_{t-1}}\right) + \left(\frac{d_t}{\left(\frac{b_{t-1} + d_{t-1}}{2}\right)}\right) \times \left(\frac{g_{t-1} + i_{t-1}}{f_{t-1} + g_{t-1} + h + i_{t-1} + j_{t-1}}\right) + \left(\frac{e_t}{\left(\frac{e_{t-1}}{2}\right)}\right) \times \left(\frac{j_{t-1}}{f_{t-1} + g_{t-1} + h + i_{t-1} + j_{t-1}}\right)$$

Sendo assim, os índices de preços gerados para o ano *t* pelo deflacionamento são:

$$f_{t-1} + g + h_{t-1} + i_{t-1} + j_{t-1} = K_{t-1}$$

$$I_{preço1} = \frac{f_t + g_t}{\left(\frac{K_{t-1}}{2}\right)} \times \left[\left(\frac{a_t}{\left(\frac{a_{t-1} + c_{t-1}}{2}\right)}\right) \times \left(\frac{f_{t-1} + h_{t-1}}{K_{t-1}}\right) + \left(\frac{b_t}{\left(\frac{b_{t-1} + d_{t-1}}{2}\right)}\right) \times \left(\frac{g_{t-1} + i_{t-1}}{K_{t-1}}\right)\right]^{-1}$$

Como,

$$I_{volume1} = \frac{a_t(f_{t-1} + h_{t-1})}{K_{t-1}\left(\frac{a_{t-1} + c_{t-1}}{2}\right)} + \frac{b_t(g_{t-1} + i_{t-1})}{K_{t-1}\left(\frac{b_{t-1} + d_{t-1}}{2}\right)} = \frac{2}{K_{t-1}} \times \frac{a_t(f_{t-1} + h_{t-1})(b_{t-1} + d_{t-1}) + b_t(g_{t-1} + i_{t-1})(a_{t-1} + c_{t-1})}{(a_{t-1} + c_{t-1})(b_{t-1} + d_{t-1})}$$

Logo,

$$I_{preço1} = \frac{f_t + g_t}{\left(\frac{K_{t-1}}{2}\right)} \times \frac{K_{t-1}}{2} \times \frac{(a_{t-1} + c_{t-1})(b_{t-1} + d_{t-1})}{a_t(f_{t-1} + h_{t-1})(b_{t-1} + d_{t-1}) + b_t(g_{t-1} + i_{t-1})(a_{t-1} + c_{t-1})} =$$

$$= \frac{(f_t + g_t)(a_{t-1} + c_{t-1})(b_{t-1} + d_{t-1})}{a_t(f_{t-1} + h_{t-1})(b_{t-1} + d_{t-1}) + b_t(g_{t-1} + i_{t-1})(a_{t-1} + c_{t-1})}$$

Utilizando o mesmo artifício feito anteriormente, fica-se com:

$$I_{preço1} = \frac{(f_t + g_t)(a_{t-1} + c_{t-1})(b_{t-1} + d_{t-1})}{a_t(f_{t-1} + h_{t-1})(b_{t-1} + d_{t-1}) + b_t(g_{t-1} + i_{t-1})(a_{t-1} + c_{t-1})} \times \frac{\frac{1}{(a_{t-1} + c_{t-1})(b_{t-1} + d_{t-1})}}{\frac{1}{(a_{t-1} + c_{t-1})(b_{t-1} + d_{t-1})}}$$

$$= \frac{f_t + g_t}{a_t\left(\frac{f_{t-1} + h_{t-1}}{a_{t-1} + c_{t-1}}\right) + b_t\left(\frac{g_{t-1} + i_{t-1}}{b_{t-1} + d_{t-1}}\right)}$$

Para o segundo semestre:

$$I_{preço2} = \frac{h_t + i_t + j_t}{\left(\frac{K_{t-1}}{2}\right)} \times \left[\left(\frac{c_t}{\left(\frac{a_{t-1} + c_{t-1}}{2}\right)}\right) \times \left(\frac{f_{t-1} + h_{t-1}}{K_{t-1}}\right) + \left(\frac{d_t}{\left(\frac{b_{t-1} + d_{t-1}}{2}\right)}\right) \times \left(\frac{g_{t-1} + i_{t-1}}{K_{t-1}}\right) + \left(\frac{e_t}{\left(\frac{e_{t-1}}{2}\right)}\right) \times \left(\frac{j_{t-1}}{K_{t-1}}\right)\right]^{-1}$$

Como

$$I_{volume2} = \frac{c_t(f_{t-1} + h_{t-1})}{K_{t-1}\left(\frac{a_{t-1} + c_{t-1}}{2}\right)} + \frac{d_t(g_{t-1} + i_{t-1})}{K_{t-1}\left(\frac{b_{t-1} + d_{t-1}}{2}\right)} + \frac{e_t j_{t-1}}{K_{t-1}\left(\frac{e_{t-1}}{2}\right)}$$
$$= \frac{2}{K_{t-1}} \times \frac{c_t(f_{t-1} + h_{t-1})(b_{t-1} + d_{t-1})e_{t-1} + d_t(g_{t-1} + i_{t-1})(a_{t-1} + c_{t-1})e_{t-1} + e_t j_{t-1}(a_{t-1} + c_{t-1})(b_{t-1} + d_{t-1})}{(a_{t-1} + c_{t-1})(b_{t-1} + d_{t-1})e_{t-1}}$$

Logo,

$$I_{preço2} = \frac{h_t + i_t + j_t}{\left(\frac{K_{t-1}}{2}\right)} \times \frac{K_{t-1}}{2} \times \frac{(a_{t-1} + c_{t-1})(b_{t-1} + d_{t-1})e_{t-1}}{c_t(f_{t-1} + h_{t-1})(b_{t-1} + d_{t-1})e_{t-1} + d_t(g_{t-1} + i_{t-1})(a_{t-1} + c_{t-1})e_{t-1} + e_t j_{t-1}(a_{t-1} + c_{t-1})(b_{t-1} + d_{t-1})}$$
$$= \frac{(h_t + i_t + j_t)(a_{t-1} + c_{t-1})(b_{t-1} + d_{t-1})e_{t-1}}{c_t(f_{t-1} + h_{t-1})(b_{t-1} + d_{t-1})e_{t-1} + d_t(g_{t-1} + i_{t-1})(a_{t-1} + c_{t-1})e_{t-1} + e_t j_{t-1}(a_{t-1} + c_{t-1})(b_{t-1} + d_{t-1})}$$

Finalizando com

$$I_{preço2} = \frac{(h_t + i_t + j_t)(a_{t-1} + c_{t-1})(b_{t-1} + d_{t-1})e_{t-1}}{c_t(f_{t-1} + h_{t-1})(b_{t-1} + d_{t-1})e_{t-1} + d_t(g_{t-1} + i_{t-1})(a_{t-1} + c_{t-1})e_{t-1} + e_t j_{t-1}(a_{t-1} + c_{t-1})(b_{t-1} + d_{t-1})}$$
$$\times \frac{\frac{1}{(a_{t-1} + c_{t-1})(b_{t-1} + d_{t-1})e_{t-1}}}{\frac{1}{(a_{t-1} + c_{t-1})(b_{t-1} + d_{t-1})e_{t-1}}} = \frac{h_t + i_t + j_t}{c_t\left(\frac{f_{t-1} + h_{t-1}}{a_{t-1} + c_{t-1}}\right) + d_t\left(\frac{g_{t-1} + i_{t-1}}{b_{t-1} + d_{t-1}}\right) + e_t\left(\frac{j_{t-1}}{e_{t-1}}\right)}$$

Note-se que as expressões obtidas são muito similares às expressões obtidas no Capítulo 3.1. No entanto, a diferença principal está nos termos que estão dentro dos parênteses, que ilustram os valores unitários do ano anterior indexados por *t-1*. Além disso, note-se que o termo que envolve o terceiro produto no índice de preço do segundo semestre possui uma estrutura que não pode ser simplificada, pois envolve o volume exportado no ano *t* e o volume exportado no ano *t-1*.

3. Verificando a nova estrutura de encadeamento

4.1 Verificando as médias semestrais do ano-base

Trabalha-se com as variações semestrais com relação ao ano corrente (ano-base). Os índices de valor, que representam a média aritmética das variações de valor com relação à média de valor exportado no ano, e os índices de volume, que representam uma média ponderada das variações de volume com relação ao volume médio exportado do ano, continuam tendo como média entre os semestres iguais a *um*. No entanto, o índice de preço do tipo Paasche, mesmo calculado explicitamente, **não** possui média aritmética igual a *um* no ano-base, pois representa uma média harmônica ponderada pelo volume exportado no **semestre** corrente. Isso pode ser verificado:

$$\frac{I_{valor1}+I_{valor2}}{2}=\frac{\dfrac{f+g}{\left(\frac{f+g+h+i+j}{2}\right)}+\dfrac{h+i+j}{\left(\frac{f+g+h+i+j}{2}\right)}}{2}=$$

$$=\frac{\left(\dfrac{\left(\frac{f+g+h+i+j}{2}\right)(f+g)+\left(\frac{f+g+h+i+j}{2}\right)(h+i+j)}{\left(\frac{f+g+h+i+j}{2}\right)\left(\frac{f+g+h+i+j}{2}\right)}\right)}{2}=\frac{\left(\dfrac{\frac{K}{2}\times K}{\frac{K}{2}\times\frac{K}{2}}\right)}{2}=\frac{\frac{K^2}{2}\times\frac{4}{K^2}}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$\frac{I_{volume1}+I_{volume2}}{2}=\frac{\left|\dfrac{a(f+h)}{\left(\frac{K(a+c)}{2}\right)}+\dfrac{b(g+i)}{\left(\frac{K(b+d)}{2}\right)}\right|+\left[\left(\dfrac{c(f+h)}{\frac{K(a+c)}{2}}\right)+\left(\dfrac{d(g+i)}{\frac{K(b+d)}{2}}\right)+\left(\dfrac{ej}{\left(\frac{Ke}{2}\right)}\right)\right]}{2}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{K\left(\frac{a+c}{2}\right)}\times(a(f+h)+c(f+h))+\dfrac{1}{K\left(\frac{b+d}{2}\right)}\times\left(b(g+i)+d(g+i)\right)+\dfrac{ej}{K\left(\frac{e}{2}\right)}}{2}=$$

$$=\frac{\left(\dfrac{f+h}{\frac{K}{2}}+\dfrac{g+i}{\frac{K}{2}}+\dfrac{j}{\frac{K}{2}}\right)}{2}=\frac{\left(\dfrac{f+h+g+i+j}{\frac{K}{2}}\right)}{2}=\frac{\left(\dfrac{K}{\frac{K}{2}}\right)}{2}=\frac{K\times\frac{2}{K}}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$\frac{I_{preço1}+I_{preço2}}{2}=\frac{\dfrac{f+g}{a\left(\frac{f+h}{a+c}\right)+b\left(\frac{g+i}{b+d}\right)}+\dfrac{h+i+j}{c\left(\frac{f+h}{a+c}\right)+d\left(\frac{g+i}{b+d}\right)+e\left(\frac{j}{e}\right)}}{2}$$

Fazendo,

$$\frac{f+h}{a+c}=z_1,\qquad \frac{g+i}{b+d}=z_2,\qquad \frac{j}{e}=z_3$$

Temos:

$$\frac{I_{preço1}+I_{preço2}}{2}=\frac{\dfrac{f+g}{az_1+bz_2}+\dfrac{h+i+j}{cz_1+dz_2+ez_3}}{2}$$

Para mostrar que a média entre esses índices não resulta no valor *um*, a expressão a seguir deve valer:

$$\frac{f+g}{az_1+bz_2}+\frac{h+i+j}{cz_1+dz_2+ez_3}=2,\qquad para\quad \forall a,b,c,d,e,f,g,h,i,j>0 \qquad (7)$$

Se se escolher, arbitrariamente,

$a=2,\quad b=3,\quad c=1,\quad d=7,\quad e=10,\quad f=5,\quad g=11,\quad h=4,\quad i=20,\quad j=14$

Fica-se com,

$$\frac{f+g}{aZ1+bZ2}+\frac{h+i+j}{cZ1+dZ2+eZ3}=\frac{5+11}{2\times\frac{9}{3}+3\times\frac{31}{10}}+\frac{4+20+14}{1\times\frac{9}{3}+7\times\frac{31}{10}+10\times\frac{14}{10}}=\frac{13340}{6579}\neq 2.$$

Como se quer demonstrar, com um contra-exemplo foi comprovado que a expressão (7) não é válida. Logo, foi provado que a média entre esses índices de preço Paasche com as ponderações no ano corrente não resultam em *um*.

4.2 Nova metodologia de encadeamento

Sabe-se que as variações semestrais (ou mensais) para os índices de base fixa, na realidade, são variações de cada semestre (ou mês) com relação à média do ano anterior "corrigidas" pela variação histórica dos índices com relação ao ano escolhido para base fixa. Ou seja, calculam-se os índices não encadeados com relação ao ano anterior e depois os encadeiam multiplicando pela média aritmética dos índices encadeados no ano anterior, criando uma comparabilidade com o ano escolhida para base fixa. Claramente, para o segundo ano os índices de valor e volume Laspeyres ficam inalterados, pois, como se verificou no Capítulo 4.1, esta média é o valor *um*.

Desejou-se avaliar quais eram as estruturas que os índices de preço das exportações encadeados representavam, para serem encadeados explicitamente. Para isso, supõe-se o seguinte cenário:

ÍNDICES NÃO ENCADEADOS						
Anos	**1º**		**2º**		**3º**	
Semestres	**1º**	**2º**	**1º**	**2º**	**1º**	**2º**
I_{valor}	V_{11}	V_{12}	V_{21}	V_{22}	V_{31}	V_{32}
I_{volume}	Q_{11}	Q_{12}	Q_{21}	Q_{22}	Q_{31}	Q_{32}
$I_{preço}$	P_{11}	P_{12}	P_{21}	P_{22}	P_{31}	P_{32}

Sendo:

V_{ab} - Índice de valor não encadeado do ano *a* no semestre *b;*

Q_{ab} - Índice de volume não encadeado do ano *a* no semestre *b; e*

P_{ab} - Índice de preço não encadeado do ano *a* no semestre *b.*

As médias dos índices de valor e volume dos primeiro e segundo anos serão representadas por:

$$\overline{V_1}=\frac{V_{11}+V_{12}}{2}=1$$

$$\overline{V_2} = \frac{V_{21} + V_{22}}{2}$$

$$\overline{Q_1} = \frac{Q_{11} + Q_{12}}{2} = 1$$

$$\overline{Q_2} = \frac{Q_{21} + Q_{22}}{2}$$

Para os primeiro e segundo anos, os índices não se modificam. No entanto, os índices encadeados para o terceiro ano sim. Os índices resultam em:

ÍNDICES ENCADEADOS						
Anos	**1º**		**2º**		**3º**	
Semestres	**1º**	**2º**	**1º**	**2º**	**1º**	**2º**
I_{valor}	V_{11}	V_{12}	V_{21}	V_{22}	$V_{31}^{*} = V_{31} \times \overline{V_2}$	$V_{32}^{*} = V_{32} \times \overline{V_2}$
I_{volume}	Q_{11}	Q_{12}	Q_{21}	Q_{22}	$Q_{31}^{*} = Q_{31} \times \overline{Q_2}$	$Q_{32}^{*} = Q_{32} \times \overline{Q_2}$
$I_{preço}$	P_{11}	P_{12}	P_{21}	P_{22}	$P_{31}^{*} = V_{31}^{*} / Q_{31}^{*}$	$P_{32}^{*} = V_{32}^{*} / Q_{32}^{*}$

Os índices de preço implícitos encadeados ficam com a seguinte estrutura:

$$P_{31}^{*} = \frac{V_{31} \times \left(\frac{V_{21} + V_{22}}{2}\right)}{Q_{31} \times \left(\frac{Q_{21} + Q_{22}}{2}\right)} = \frac{V_{31} \times \left(\frac{V_{21} + V_{22}}{2}\right)}{\frac{V_{31}}{P_{31}} \times \left(\frac{\frac{V_{21}}{P_{21}} + \frac{V_{22}}{P_{22}}}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{V_{21} + V_{22}}{2}\right)}{\frac{1}{P_{31}} \times \left(\frac{\frac{V_{21}}{P_{21}} + \frac{V_{22}}{P_{22}}}{2}\right)} = P_{31} \times \underbrace{\left(\frac{V_{21} + V_{22}}{\frac{V_{21}}{P_{21}} + \frac{V_{22}}{P_{22}}}\right)}_{Encadeador} \tag{8}$$

$$P_{32}^{*} = \frac{V_{32} \times \left(\frac{V_{21} + V_{22}}{2}\right)}{Q_{32} \times \left(\frac{Q_{21} + Q_{22}}{2}\right)} = \frac{V_{32} \times \left(\frac{V_{21} + V_{22}}{2}\right)}{\frac{V_{32}}{P_{32}} \times \left(\frac{\frac{V_{21}}{P_{21}} + \frac{V_{22}}{P_{22}}}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{V_{21} + V_{22}}{2}\right)}{\frac{1}{P_{32}} \times \left(\frac{\frac{V_{21}}{P_{21}} + \frac{V_{22}}{P_{22}}}{2}\right)} = P_{32} \times \underbrace{\left(\frac{V_{21} + V_{22}}{\frac{V_{21}}{P_{21}} + \frac{V_{22}}{P_{22}}}\right)}_{Encadeador} \tag{9}$$

Note-se que, agora, o valor para que os índices de preço Paasche precisem ser multiplicados para encadear a série não é mais a média aritmética simples. As expressões em destaque nas expressões (8) e (9) representam, na realidade, ***a média harmônica dos índices de preço ponderada pelos índices de valor*** do segundo ano, que, nesta metodologia, são os valores que irão tornar a série de índice de preço compatível com um ano de base fixa escolhido.

Com esse resultado, pode-se calcular explicitamente as séries de preço e de valor encadeados, para, só então, se deflacionar e se obter implicitamente os índices de volume encadeados.